数理解析研究所講究録
532巻 1984年 41-54

MHD平衡方程式に対する一反復解法

東大教養　菊地文雄 (Fumio Kikuchi)

概要　本小論はMHD平衡等に現れるある半線形固有値問題の若干の性質とその有限要素近似について述べたものである。特に反復解法の提案と収束証明，有限要素解の誤差評価などを与えている。以下では要点のみを示す。詳細は下記の題目で投稿中である。

F. Kikuchi, K. Nakazato, and T. Ushijima : Finite Element Approximation of a Nonlinear Eigenvalue Problem Related to MHD Equilibria.

1. 問題

Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,3)$ の有界領域，$\Gamma=\partial\Omega$ はその境界とし，実数 λ と実関数 u ($\bar{\Omega}$で定義) として下記を満たすものを求める。

$$-\Delta u=\lambda f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad u=-1 \quad \text{on } \Gamma \tag{1}$$

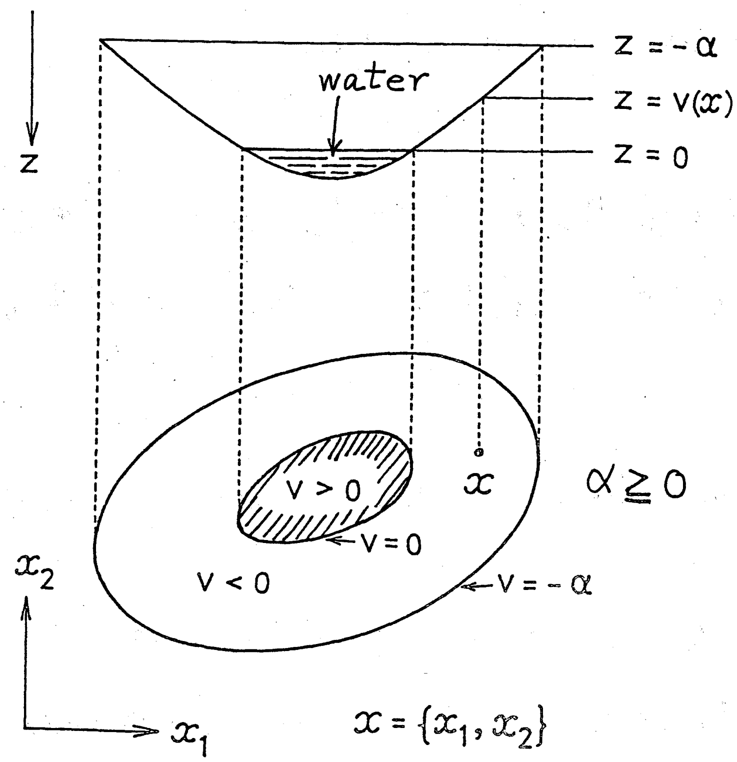
ここに $f(u)=u^+$，すなわち $u^+(x)=\max\{0, u(x)\}$ $(x\in\Omega)$ である。自明な解として $u(x)\equiv-1$，λは任意，

があるが，ここではそれ以外の非自明解を求める非線形固有値問題として扱う（非線形性は $f(u)$ に起因する）。

2. 物理的モデル

問題(1) は MHD平衡を表わす Grad-Shafranov 方程式に関連して現れる。ここではそれ以外の物理的モデルとして実際に目で見えそうなものを与えてみた。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ とし，これが薄い一様に張られた膜の平面形に対応するとしよう。いま膜に液体がのって変形したとする。Ω のうちで液体でおおわれた部分が連結だとすると，液面は水平面になり（表面張力は無視），その z 座標を 0 としても一般性を失わない。Γ では膜は固定されており，その z 座標は $-\alpha$ （$\alpha \geqq 0$）とする。変形後の膜の z 座標を $v(x)$ とすると，液体による荷重は λv^+（λ は物理的パラメータ）となり，次の膜の方程式を得る。



$$
\begin{cases} -\Delta v = \lambda v^+ & \text{in } \Omega \\ v = -\alpha & \text{on } \Gamma \end{cases} \tag{2}
$$

$\alpha > 0$ であれば，

$u = \alpha^{-1} v$ なる変換により(1)を得る。ここで λ は不変。u^+ の正斉次性を利用すればよい。

3. 若干の結果

(1)の解 $\{\lambda, u\}$ について，いくつかの結果を述べる。説明のある部分は発見的なもので厳密ではない。

3.1 線形固有値問題

"$\{\lambda, v\}$ として，$v \neq 0$ かつ次式を満たすものを見い出せ。"

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{in } \Omega \quad , \quad v = 0 \quad \text{on } \Gamma \tag{3}$$

第1固有対を $\{\lambda_0, \varphi\} \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ と書く。ただし $\lambda_0 > 0$ で単純，また φ は次の性質を満たすものが1つ，かつ1つのみ存在する。

$$\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} = 1, \qquad \varphi(x) > 0 \quad (\forall x \in \Omega) \tag{4}$$

3.2 解の分解

(1)を満たす u があったとして，次のように分解しよう。

$$u = (u, \varphi)_{L_2} \varphi + \tilde{u} \ ; \ (\tilde{u}, \varphi)_{L_2} = 0 \tag{5}$$

3.3 変換

$(u, \varphi)_{L_2} > 0$ の場合を考え，次の変換を u に施す。

$$u^* = \varepsilon u, \quad \varepsilon = 1/(u,\varphi)_{L_2} > 0 \tag{6}$$

すると次式を得る。

$$-\Delta u^* = \lambda f(u^*) \ \text{in}\ \Omega, \quad u^* = -\varepsilon \ \text{on}\ \Gamma \tag{7}$$

もちろん $(u^*, \varphi)_{L_2} = 1$ である。逆にある $\varepsilon > 0$ に対し (7) を満たす $\{\lambda, u^*\}$ が存在すれば, $u = \varepsilon^{-1} u^*$ として $\{\lambda, u\}$ は (1) を満たす（λ 共通）。なお (7) 自体は $\varepsilon \leqq 0$ についても意味を持ち得る。特に $\varepsilon = 0$ なら (4) により $\{\lambda_0, \varphi\}$ は (7) を満たす（λ_0：第1固有値）。

3.4 予備的考察

$\varepsilon \fallingdotseq 0$ のとき, $\{\lambda_0, \varphi\}$ に近い (7) の解（経路）が存在することが予想される。$\varepsilon \fallingdotseq 0$ のとき, $\{\lambda, u^*\}$ が次の形で近似できるとしてみよう。

$$u^* \fallingdotseq \varphi + \varepsilon \psi, \ (\psi, \varphi)_{L_2} = 0 \ ; \ \lambda \fallingdotseq \lambda_0 + \varepsilon \mu \tag{8}$$

(後に示すように) 関係

$$f(u^*) \fallingdotseq f(\varphi + \varepsilon \psi) \fallingdotseq \varphi + \varepsilon \psi \tag{9}$$

が成立するとするならば, (7), (8), (9) より

$$-\Delta \varphi - \varepsilon \Delta \psi \fallingdotseq \lambda_0 \varphi + \lambda_0 \varepsilon \psi + \varepsilon \mu \varphi \tag{10}$$

を得る（εの1次の項までとった・摂動法的考察）。よって，

$$-\Delta\psi-\lambda_0\psi=\mu\varphi \ \text{in}\ \Omega,\quad \psi=-1\ \text{on}\ \Gamma \qquad (11)$$

および $(\psi,\varphi)_{L_2}=0$ を ψ は満たすべきである。固有値問題の摂動法でよくやるように，(11) の微分方程式に φ をかけ Ω で積分してみよう。

$$-(\Delta\psi,\varphi)_{L_2}-\lambda_0(\psi,\varphi)_{L_2}=\mu(\varphi,\varphi)_{L_2} \qquad (12)$$

$\Delta\psi=\Delta(\psi+1)$， $\psi+1=0$ on Γ に注意し Green の定理を使うと，

$$-(\psi+1,\Delta\varphi)_{L_2}-\lambda_0(\psi,\varphi)_{L_2}=\mu(\varphi,\varphi)_{L_2} \qquad (13)$$

$-\Delta\varphi=\lambda_0\varphi$, $\|\varphi\|_{L_2}=1$ により

$$\mu=\lambda_0(1,\varphi)_{L_2} \qquad (14)$$

よって μ, ψ として予想されるものが確定した（ψ は一意）。あとは(8)の残余の項を決定できるかが勝負である。

3.5 主要結果

ε（$|\varepsilon|\leqq\varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ はある正の数）を径路パラメータとする (7) の解の径路 $\{\lambda(\varepsilon), u^*(\varepsilon)\}$（各 ε で $\mathbb{R}\times H^1(\Omega)$ に値をとる）として次のようなものが存在する（ε, $\varepsilon^*\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$）。

$$\lambda(0) = \lambda_0 \quad , \quad u^*(0) = \varphi \tag{15}$$

$$|\lambda(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon^*) - (\varepsilon - \varepsilon^*)\lambda_0(1, \varphi)_{L_2}| + \|u^*(\varepsilon) - u^*(\varepsilon^*) - (\varepsilon - \varepsilon^*)\psi\|_{H^1} \leqq K|\varepsilon - \varepsilon^*| \tag{16}$$

ただし K はある正の数で，ε_0 を適切に選べばいくらでも 0 に近くできる。

上記の結果からは $\lambda(\varepsilon)$, $u(\varepsilon)$ の ε に関する Lipschitz 連続性，それらの $\varepsilon = 0$ での微分可能性，および下記の関係式などを得る（式(8) が成立している）。

$$u^*(\varepsilon) = \varphi + \varepsilon\psi + o(\varepsilon), \quad \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_0(1, \varphi)_{L_2} + o(\varepsilon) \tag{17}$$

3.6 証明法の概要

縮小写像の原理を用いる。まず，ある ε に対して (7) を満たす $u^* \in H^1$ が存在するとして，次のように分解する。

$$u^* = \varphi + \varepsilon\psi + w \quad , \quad (w, \varphi)_{L_2} = 0 \tag{18}$$

φ, $\psi + 1$, $w \in H^1_0(\Omega)$ に注意。(7) に代入して整理すると，

$$-\Delta w - \lambda_0 w = \lambda f(u^*) - \lambda_0 u^* - \varepsilon\lambda_0(1, \varphi)_{L_2}\varphi \tag{19}$$

(19) の可解条件として，その右辺は φ に L_2 で直交していなければならないから，

$$\lambda = \lambda_0 \frac{(u^*, \varphi)_{L_2} + \varepsilon (1, \varphi)_{L_2}}{(f(u^*), \varphi)_{L_2}} \tag{20}$$

ただし分母≠0とする。εを与え，(19)，(20)を解いてwを求めればよい。反復によって求めてみよう。式(19)，式(20)の右辺をそれぞれ $\Pi(\varepsilon, w, \lambda)$，$\Lambda(\varepsilon, w)$ とすると，反復式として例えば，$w^{(0)} = 0$ として，$i = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$\begin{cases} \lambda^{(i)} = \Lambda(\varepsilon, w^{(i-1)}) \\ -\Delta w^{(i)} - \lambda_0 w^{(i)} = \Pi(\varepsilon, w^{(i-1)}, \lambda^{(i)}) \end{cases} \tag{21}$$

ただし $w^{(i)} \in H_0^1(\Omega)$，$(w^{(i)}, \varphi)_{L_2} = 0$

$|\varepsilon|$が十分小さいとき，$H_0^1(\Omega)$ のある部分集合上でこの反復が（$w^{(i)}$ について）縮小的であることを示せばよい。そのための<u>key lemma</u>は次のとおり。

"任意の $K > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在し，$H^1(\Omega)$ の任意の2元で $\|v_i\|_{H^1} \leqq \delta$ $(i = 1, 2)$ であるような v_1, v_2 に対して次式が成立する。"

$$\|f(\varphi + v_1) - f(\varphi + v_2) - (v_1 - v_2)\|_{L_2} \leqq K \|v_1 - v_2\|_{H^1} \tag{22}$$

証明はRappazによる。(22)はfをH^1からL_2への写像と見たときのLipschitz連続性，またfのφにおけるFrechet導関数がH^1からL_2への標準的単射であることを示す(式(9))。

4. 有限要素近似

以下では特にΩが凸多面体の場合を考える。そしてΩの正則な単体分割の族$\{T^h\}_{h>0}$を1つ考える。$h>0$は各分割T^hでの最大辺長である。T^hでの連続な区分1次多項式の全体（各単体内で1次式，$\bar{\Omega}$で連続）をX^h，$X^h \cap H^1_0(\Omega)$をX^h_0とする。X^hとX^h_0はそれぞれH^1，H^1_0の有限次元部分空間と見なせる。

以下，連続の場合にならって近似を考える。次の記号を用いる。

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \quad (\forall u, v \in H^1) \tag{23}$$

$$(u, v) = (u, v)_{L_2} = \int_\Omega u v\,dx \quad (\forall u, v \in L_2) \tag{24}$$

まず(1)の近似は：$\{\lambda_h, u_h\} \in \mathbb{R}\times X^h$として次式を満たすものを求める。

$$\begin{cases} \langle u_h, v_h\rangle = \lambda_h (f(u_h), v_h) & ;\ \forall v_h \in X^h_0 \\ u_h + 1 \in X^h_0 & \end{cases} \tag{25}$$

(3)の近似は：$\{\lambda_h, u_h\} \in \mathbb{R}\times X^h_0$として$u_h \neq 0$かつ次式を満たすものを求める。

$$\langle u_h, v_h\rangle = \lambda_h (u_h, v_h) \quad ;\ \forall v_h \in X^h_0 \tag{26}$$

$\{\lambda_0, \varphi\}$の近似としては，(26)の第1固有対$\{\lambda_{h0}, \varphi_h\} \in \mathbb{R}\times X^h_0$を用いる。$h$が十分小ならば，$\lambda_{h0} > 0$，$\lambda_{h0}$は単

純，かつ φ_h は次の式を満すように（一意に）定められる。

$$\|\varphi_h\|_{L_2} = 1 \ , \qquad (\varphi, \varphi_h) > 0 \tag{27}$$

(25) を満たす $\{\lambda_h, u_h\} \in \mathbb{R} \times X^h$ が存在したとして，(5) にならい次のように分解しよう。

$$u_h = (u_h, \varphi_h)\varphi_h + \tilde{u}_h \quad ; \quad (\tilde{u}_h, \varphi_h) = 0 \tag{28}$$

$(u_h, \varphi_h) > 0$ であれば (6) に対応して変換

$$u_h^* = \varepsilon u_h \ , \qquad \varepsilon = 1/(\tilde{u}_h, \varphi_h) > 0 \tag{29}$$

を (25) に施し，(7) に対応する次式を得る。

$$\begin{cases} \langle u_h^*, v_h \rangle = \lambda_h (f(u_h^*), v_h) \quad ; \ {}^\forall v_h \in X_0^h \\ u_h^* + \varepsilon \in X_0^h \ , \qquad (u_h^*, \varphi_h) = 1 \end{cases} \tag{30}$$

ψ の近似として $\psi_h \in X^h$ を次の条件で定める（(11), (14) 参照）。

$$\begin{cases} \langle \psi_h, v_h \rangle - \lambda_{h0}(\psi_h, v_h) = \lambda_{h0}(1, \varphi_h)(\varphi_h, v_h) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\forall v_h \in X_0^h) \\ \psi_h + 1 \in X_0^h \ , \quad (\psi_h, \varphi_h) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

h が十分に小ならば ψ_h は一意に存在する。

(18) にならい，(29) を満たす u_h^* がある ε に対して存在したとして，次のように分解する。

$$u_h^* = \varphi_h + \varepsilon \psi_h + w_h\ , \quad (w_h, \varphi_h) = 0 \tag{32}$$

φ_h, ψ_h+1, $w_h \in X_0^h$ である。(30) に代入して整理すると，(19) に対応する次式を得る。

$$\begin{aligned}&\langle w_h, v_h \rangle - \lambda_{h0}(w_h, v_h) \\ &\quad = (\lambda_h f(u_h^*) - \lambda_{h0} u_h^* - \varepsilon\lambda_{h0}(1,\varphi_h)\varphi_h, v_h)\ ;\ {}^\forall v_h \in X_0^h\end{aligned} \tag{33}$$

ここで $v_h = \varphi_h$ とおくと，(20) に対応する次式が求められる。

$$\lambda_h = \lambda_{h0} \frac{(u_h^*, \varphi_h) + \varepsilon(1, \varphi_h)}{(f(u_h^*), \varphi_h)} \tag{34}$$

あとは連続の場合にならい，$|\varepsilon|$ が十分小，h が十分小のとき，上記に対する反復過程が（w_h について）X_0^h のある部分集合上で縮小的なことを示す。また，解の誤差評価式も求める。主要結果は次のようになる。

ある正の数 ε_0, h_0, K, C が存在し，次のことが成立。

(1) 各 $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $h \in]0, h_0]$ に対し，(30) を満たす $\{\lambda_h(\varepsilon), u_h^*(\varepsilon)\} \in \mathbb{R} \times X^h$ が存在（解の径路）

(2) この $\{\lambda_h(\varepsilon), u_h^*(\varepsilon)\}$ は次式を満たす（$\varepsilon, \varepsilon^* \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$）。

$$|\lambda_h(0) - \lambda_{h0}| + \|u_h^*(0) - \varphi_h\|_{H^1} \leqq C h^2 \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&|\lambda_h(\varepsilon) - \lambda_h(\varepsilon^*) - (\varepsilon - \varepsilon^*)(1, \varphi_h)\lambda_{h0}| \\ &+ \|u_h^*(\varepsilon) - u_h^*(\varepsilon^*) - (\varepsilon - \varepsilon^*)\psi_h\|_{H^1} \leqq K|\varepsilon - \varepsilon^*|\end{aligned} \tag{36}$$

(3) 誤差評価式： $(\alpha=0,1)$

$$|\lambda_h(\varepsilon)-\lambda(\varepsilon)|+h^{\alpha}\|u_h^*(\varepsilon)-u(\varepsilon)\|_{H^{\alpha}}\leqq Ch^2 \tag{37}$$

なお，$K>0$ は ε_0, h_0 を適切に選ぶことにより，いくらでも0に近くできる。(35)は，特別な場合には $\lambda_h(0)=\lambda_{h0}$，$u_h^*(0)=\varphi_h$ となり，その時は自明である。(36)より解のεに関するLipschitz連続性が得られる。(37)の評価は，hのオーダーに関する限り最良と考えられる。

注意　　Ωが凸多角形という条件は，Ωの三角形分割として適切なものが得られ，解がなめらかさを持つための十分条件として採用した。

5. 集中化

前節の結果はすべて，近似方程式の作成に必要な内積演算が厳密に実行されたとの仮定に基いている。このうち式(23)の$\langle u,v\rangle$の型の部分は，u,vがX^hの元なら簡単である。しかし$(f(u_h),v_h)$ $(u_h,v_h\in X^h)$の型の部分は実行できないことはないが，かなり面倒である。そこでこの部分も含め，積分の一部を数値的に（近似的に）処理してしまおう。

eを三角形分割のある1つの（任意の）三角形（一般に単体）とする。$u,v\in C(\bar{\Omega})$に対し次の量を定義する。

$$(u, v)_h = \sum_e (u, v)_{h,e} \tag{38}$$

$$\|u\|_h = \{(u, u)_h\}^{1/2} \tag{39}$$

ただし，

$$(u, v)_{h,e} = \frac{\mu(e)}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} u(Q_i^e)\, v(Q_i^e) \tag{40}$$

ここで Q_i^e は e の頂点 $(1 \leqq i \leqq n+1)$，$\mu(e)$ は e の Lebesgue 測度である。すなわち，(u, v) $(u, v \in C(\bar{\Omega}))$ の計算に必要な積分を各要素 e ごとに $(n+1)$-点公式（$n=1$ なら台形則）で近似的に実行する。$X^h \subset C(\bar{\Omega})$ に注意すると，式(25) の $(f(u_h), v_h)$，式(26) の (u_h, v_h)，式(28) の (u_h, φ_h) $(\tilde{u}_h, \varphi_h)$，式(30) の $(f(u_h^*), v_h)$，(u_h^*, φ_h)，式(31) の $(\tilde{\psi}_h, \varphi_h)$，$(1, \varphi_h)$，$(\varphi_h, v_h)$，$(\tilde{\psi}_h, \varphi_h)$，式(33) の (w_h, v_h)，その他において $(\ ,\ ) \to (\ ,\ )_h$ の近似ができる。また式(27) で $\|\varphi_h\| = 1$ を $\|\varphi_h\|_h = 1$ とおきかえられる。

このようにすることで，$(f(u_h), v_h)$ $(u_h, v_h \in X^h)$ の型の計算を大幅に簡略化できる。また式(26) の線形固有値問題においては，いわゆる"質量マトリックスの集中化"が利用でき，固有対の計算が楽になる。必要な計算式等は，あとは4節とほとんど同様であり省略する。反復式の収束証明や誤差評価のためには，集中化により生じる摂動を評価しておく必要があるが，以下に重要なものを列挙しておく。

〔1〕 $\forall u_h, v_h \in X^h$ に対し

① $\frac{1}{n+2}\|u_h\|_h^2 \leqq \|u_h\|^2 \leqq \|u_h\|_h^2$ (41)

② $|(u_h, v_h)_h - (u_h, v_h)| \leqq C h^2 \|u_h\|_{H^1} \|v_h\|_{H^1}$ (42)

③ $|(f(u_h), v_h)_h - (f(u_h), v_h)| \leqq C h \|u_h\|_{H^1} \|v_h\|_{H^1}$ (43)

C は u_h, v_h, h に依存しない正数.

〔2〕 式(22)に対応： $\varphi_h^* \in X_0^h$ は φ (固有関数) の補間関数とする。$\forall K>0$ に対し, ある $\delta>0$, $h_0>0$ が存在し,

$$\|f(\varphi_h^* + v_{h1}) - f(\varphi_h^* + v_{h2}) - (v_{h1} - v_{h2})\|_h$$
$$\leqq K \|v_{h1} - v_{h2}\|_{H^1} \qquad (44)$$

が $\|v_{hi}\|_{H^1} \leqq \delta$ であるような任意の $v_{hi} \in X^h$ $(i=1,2)$ (ただし $h \leqq h_0$) に対し成立する。

以上の準備の下に前節で与えた径路の存在に関する結果が同様に成立する。ただし, 誤差評価は次のようになる。

$$|\lambda_h(0) - \lambda_{h0}| + \|u_h^*(0) - \varphi_h^L\|_{H^1} \leqq C h \qquad (45)$$

$$|\lambda_h(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)| + \|u_h^*(\varepsilon) - u(\varepsilon)\|_{H^1} \leqq C h \qquad (46)$$

φ_h^L は集中化による φ の近似である。前節では関数の L_2 での誤差評価が $O(h^2)$ であったが，(43)のため，$O(h)$ の評価しか得られなかった。ただし H^1 での評価は集中化しない場合と同様で，その点では集中化により精度は落ちていないと言える。計算の簡略化により得られる利益は言うまでもない。

参考文献

[1] Kikuchi, F.: Construction of a path of MHD equilibrium solutions by an iterative method, ISAS (Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo) Report, Vol. 44 (1979) 97-111.

[2] Kikuchi, F.: An iteration scheme for a nonlinear eigenvalue problem, Theo. Appl. Mech. 29 (1981) 319-333.

[3] Rappaz, J.: Approximation of a nondifferentiable nonlinear problem related to MHD equilibria, preprint, Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1983.